SELBSTVERANTWORTLICHES LERNEN

Schule:.......................... Rudolf-Steiner-Schule Salzburg

Schulstufe:.................... Mittelstufe

Klassenstufe: 8

Fach:............................ Mathematik

Thema:.......................... Gleichungen im Kopfrechnen

ProjektbetreuerIn:......... Antje Wienke-Kratschmer, Frank Rothe

Datum:.......................... 2011/2012

Inhaltsverzeichnis

Projektplanung und -evaluation

Vorbemerkung zur Leseweise des Projektplanes	
Text normal dünn	bedeutet: ursprünglicher Projekttext
Text aber fett	**bedeutet: spezielles Projektanliegen dieses Jahres**
Blauer Text	bedeutet: Beobachtungen/Auswertung dieses Jahres
Roter Text	bedeutet: besondere Konsequenzen der Auswertung d. J.

Ziele und innere Motive

Die Erfahrungen früherer Jahre hat gezeigt, dass das systematische Aufstellen von Gleichungen aus Textaufgaben den SchülerInnen in dieser Altersstufe häufig sehr schwer fällt. Gleichzeitig war es eine Hilfe, wenn dieses „Gleichungen aufstellen" gemeinsam an der Tafel besprochen worden war. **Im letzten Jahr war unsere Frage in diesem Projekt: Wie kann das Aufstellen von Gleichungen für SchülerInnen so entwickelt werden, dass das systematische Aufschreiben für sie bewältigt war wird und als Hilfe erscheint. Dieses Jahr ist die Frage gleich, jedoch baut das ganze Projekt auf den Erfahrungen des letzten Jahres auf. Dadurch modifizieren sich die unterschiedlichen Projektaspekte.**

Gewünschte, äußere Ergebnisse

Die SchülerInnen entwickeln bei sinnvollen, bedeutungsvollen Textaufgaben die Fähigkeit entsprechende Gleichungen aufzustellen und zu lösen. Unter sinnvollen Textaufgaben werden hier Aufgaben verstanden, die im Erfahrungshorizont der SchülerInnen liegen. Das Entwickeln und Lösen von Aufgaben kann enaktiv als Kopfrechenaufgabe geschehen. Ein weiterer Schritt ist die Fähigkeit des symbolischen Formulierens der Gleichung. Dem schließt sich die Fähigkeit zum systematischen Lösen an.

Aufbauend auf die Erfahrungen des letzten Jahres geht es besonders um

- **ein verstehender Umgang mit Gleichungen auf der ikonisch-bildhaften Darstellungsebene**
- **eine verstehenden Übergang von der ikonischen zum symbolisch-systematischen Lösen von Gleichungen**

Zusätzlich soll die Tipp-Methode zum selbstständigen Lösen von Gleichungen während der Übungszeiten auf ihre Effektivität untersucht werden.

Indikatoren / Wahrnehmungsfelder

Als Anzeichen für das enaktive Aufstellen von Gleichungen dient das Lösen von Zahlenrätseln während des Kopfrechnens.

Das bekommen die SchülerInnen gut hin. Es melden sich viele SchülerInnen, regelmäßig und oft. Die Gesichter leuchten beim Kopfrechnen.

Allerdings sagen die SchülerInnen bei dem Blitzfeedback (50 Anhang) am Ende der Epoche, das das Kopfrechnen dann

- langweilig wurde
- irgendwann hatte man es einfach raus und
- es war keine Steigerung mehr möglich

⇨ Die grundlegen Kopfrechenaufgaben sind ein wesentliches Muss in der ersten Woche für den enaktiven Einstieg in das Thema

⇨ In den nachfolgenden Wochen müssen die Grundaufgaben deutlich reduziert werden und einen Steigerungseffekt enthalten; es entsteht ein Zeitgewinn, der für gut andere Unterrichtsteile genutzt werden kann.

Das Umsetzen von schriftlich formulierten Zahlenrätseln in eine symbolische Gleichungsform während der gemeinsamen Unterrichtsbesprechungen ist ein weiteres Beobachtungsfeld (Kleine-Große-Aufgaben (=Zwei-Zahlen-Rätsel), mathematische Schreibweise, Gerade-noch-die-Guten-Erklärungsaufgaben).

Besondere Beachtung gebührt dabei dem bildhaft-ikonischen Umgang mit den Gleichungen.

- Erfolg der (zweiten) Woche: die Idee der bildhaften Rechenweise (mit den Kästchen in einer Reihe). Das gehört unbedingt noch im Konzept ergänzt

  ⇨ Bildhafte Rechen-Kästchen-Weise einbauen

- Die bildhafte Kästen-Rechen-Erklärung (s. 60 Anhang) ist bei den SchülerInnen angekommen. Aber sie ist für sie ein statisches Erklärungsmodell. Es ist keine bildhafte Lösungsmethode geworden, was in Anbetracht er kurzen Zeit in meinem Konzept auch nicht verwundert. Das zweite Erklärungsbeispiel fiel ihnen dann schwer ...

  ⇨ Kann die Kästchen-Rechen-Erklärungsmethode mehr als nur im statischen Sinne verwendet werden? Braucht es dafür ein Extramodul? In welcher didaktischen Situation wäre dass interessant? 6. Klasse? Voraussetzungen?

- Die Gleichung für die kleine Zahl k hilft wie im letzten Jahr den SchülerInnen sehr im bildhaften Verständnis bzw. Darstellen der Zahlenrätsel.

Beim Bearbeiten der PLUS-Aufgaben wäre wahrzunehmen, wie SchülerInnen die Textaufgaben (insbesondere Zahlenrätsel und andere sinnvolle Textaufgaben (siehe oben)) symbolisch umsetzten und systematisch lösen.

Dies ist sicherlich besonders zu beobachten beim Kontextwechsel der Textaufgaben.

Die Frage nach dem Übergang von der bildhaft-ikonischen Darstellungsebene zur symbolisch-systematischen ist kritisch zu betrachten.

- Der erste (Verständnis-)Schritt vom bildhaften Zahlen-Rätsel zum symbolischen Lösen der Gleichung (für k) ist – anhand des kleinen Theaterstückes – gut angekommen. Die **beiden unterschiedlichen Rechenmethoden** – die des ausprobierenden Knobelns und die des systematischen Gleichung Aufstellens – sind deutlich geworden – jedenfalls in der Theaterstücksituation. Vor allem: die symbolische Verwendung der Gleichung für die kleine Zahl scheint akzeptiert. Die SchülerInnen **konnten trennen zwischen** den bildhaften Entitäten der kleinen und großen Zahl einerseits und dem reinen Gleichung lösen durch Umformen andererseits. Was war dabei hilfreich? Das ganz klar, d.h. äußerlich anschaulich (zugeklappte Tafel, Ausspruch von Max im Stück, wurde: ich muss das Zahlenrätsel nicht kennen, um die Gleichung (für k) lösen zu können (s. 70 Anhang).

  ⇨ Jetzt gilt es mit ihnen noch erste gemeinsame und gewöhnende Schritte in der systematischen Methode zu machen

- Die Umsetzung des „Theaterspieles“ vom Freitag d.h. die gezielte und bewusste Anwendung der Gleichung für k an einer Beispielaufgabe (mit drei Zahlen) war für die SchülerInnen in der Klasse/Gruppe kein Problem. Das spricht für eine gute Verständnisgrundlage (s. 80 Anhang).

- Den Umstieg am folgenden Tag auf einen **neuen (Gleichungs-)Kontext** schafften die SchülerInnen gut. Die Taschengeldsituation ist ihnen gut geläufig. Das Problem ließ sich überraschend schnell in der Gemeinschaft systematisch lösen (s. 90 Anhang).
    - ⇨ Taschengeldkontext für die PLUS-Aufgaben wählen.
    - ⇨ Taschengeldkontext auch in ZR-Konzept für C integrieren.

Beim Bearbeiten der Übungsblätter arbeiten die SchülerInnen differenziert. Die Schnelleren kommen bei die anspruchsvollen Aufgaben zu den Tipps. Welche Erfahrungen gibt es hierzu?

Die SchülerInnen müssen ermuntert werden bei den Tipps nachzuschauen. Den Lehrer zu fragen ist ja bequemer. Dann scheinen sie mit den Tipps z. T. nicht so viel im ersten Ansatz anfangen zu können, da wir die Tipps inhaltlich erst erläutern müssen. Später formuliert ein SchülerInnen mal auf die Frage hin, wie ihm der Tipp weitergeholfen habe „Gar nicht, wie immer!“

Wie können / soll die Tipps überarbeitet werden?

Die Aufgaben werden rechnerisch komplexer, schwieriger, anspruchsvoller oder anders. Dadurch kommen die SchülerInnen ins Nachdenken und der Arbeitsfluss stockt. Jetzt überlegen die meisten SchülerInnen zuerst. Das Nachschlagen ist erst mal lästig. Daher sollen die Tipps als zweiter Schritt sozusagen

- Direkt einen konkreten Hinweis zum Weitermachen liefern, d.h.
- keine großen Nachdenk-Klimmzüge
- zügiges Übertragen z.B. durch ein ähnliches ausgeführtes Beispiel
- oder spezielle (Denk-)Strategien vermitteln

Wichtig ist auf jeden Fall: Die Tipps sollen

- die SchülerInnen als wirkliche Hilfe erleben
- den SchülerInnen wieder in den Arbeitsfluss helfen
- den SchülerInnen ggf. besonders vermitteln.

Kriterien & Bewertung

Mit dem enaktiven Lösen von Zahlenrätseln während des Kopf Rechnens sollten alle SchülerInnen gut zurechtkommen.

Das Entwickeln von Gleichungen während der Besprechungen wird differenzierter ausfallen. Bei dem Entwickeln des Lösungsansatzes werden einige begabte SchülerInnen dabei sein (ein Drittel). Aber bei dem aufmerksamen Mitverfolgen sollte sicherlich ein zweites Drittel aller SchülerInnen mit Verständnis mit von der Partie sein.

Das selbstständige Lösen von Textaufgaben bei den PLUS-Aufgaben sollte bei rund einem Drittel aller SchülerInnen gelingen.

Neben den oben genannten quantitativen Kriterien wären auch immer qualitative Aspekte zusätzlich zu berücksichtigen. Solche wären: Besondere Lösungsideen, hohe Selbstständigkeit, besondere Formulierung, etc.

- **Problem** dieser SchülerInnen: Sie sehen wenig und ziehen wenig Querverbindungen. Fast alles ist für sie immer wie neu. So wirken sie langsam ...
    - ⇨ **Wiederholen und Erinnern** d.h. die (Quer-)Verbindung an bisheriges: hier ist ihnen zu helfen (z.B. durch anschauliche Hilfen, die Anschauung)
    - ⇨ Inhaltliche Querverbindungen **zwischen verschiedenen Darstellungsformen** mit ihnen üben (z.B. Text und Gleichung)
    - ⇨ Inhaltliche Querverbindungen zwischen altem und einer neuen Situation mit ihnen als **Analogie / Entsprechung** üben.
    - ⇨ **Genug Lernzeiten** einrichten, in denen sie dann das gemeinsame Querverbinden selber anwenden und erproben können.
- Alle SchülerInnen sind in die mathematische Welt eingetaucht! (erste Woche)
- Die Gemütlichkeit der Klasse ist wohl ein Grund dafür, dass die SchülerInnen noch nicht zu PLUS gekommen sind. Auch meine ausprobierende Beschäftigung mit der Frage der Schwerpunkte des Lehrganges ist hierfür verantwortlich. Jedenfalls ...
    - ⇨ ... wollen wir in der kommenden Woche durch gezielte Differenzierung und ermunterndes Ansprechen einige SchülerInnen zur Beschäftigung mit den PLUS-Aufgaben bringen.
- Wenngleich die SchülerInnen nun sicherer werden, war dies doch ein Prozess. Ein echtes **Epochentief** hatten wir am Dienstag (Heike). Doch dann war das richtig verfolgen und die SchülerInnen sind richtig viel weitergekommen. Die Inhalte setzen sich. Allerdings hat sich die Klasse auch geteilt: die Langsameren und die schneller, abstrakt Denkenderen. Nun haben wir die **Differenzierung** offiziell gemacht.
    - ⇨ Vorsicht! Überschätzung & Faulheit noch beachten
- Gleichzeitig kommen die SchülerInnen zu einem guten Verständnis im bildhaften Umgang mit Gleichungen und ebenso gelingt der Übergang zum symbolisch-systematischen Lösungsverfahren gut.

Unter Berücksichtigung des Problems dieser speziellen Klasse erscheinen beide Aspekte der diesjährigen Forschungsfrage (bildhafter Umgang sowie Übergang bildhaft-symbolisch) eine klare Antwort zu haben: Der in der Praxis durchgeführte Weg hilft den SchülerInnen bei ihrem eigentlichen (Lern-)Ziel ein entsprechendes Verständnis für Gleichungen aufzubauen.

Ebenso haben sich Fragen an den durchgeführten Kurs ergeben.

Diese wurden besonders im Blitz-Feedback mit den SchülerInnen deutlich:

- **Eigentliches Kopfrechnen**: später dann langweilig; man hat es dann raus; keine Steigung mehr möglich
- didaktische Überarbeiten (s. a. oben)
- **Differenzierung**: Langeweile bei zu viel ähnlichen Zahlen/Rechnungen Übungen; Zeitgewinn
- Differenzierung jedenfalls - auch im Schwerpunkt Gleichungen-Lösen – einbauen bzw. betonen; die unterrichtenden LehrerInnen müssen das unbedingt wissen
- **Tafelaufgaben:** teils zu langweilig; teils auch mehr Zeitbedarf für die Übungen
- Tafelaufgaben überarbeiten, raffen, konzentrieren, Lehreranmerkungen

Welche Erfahrungen und Schlüsse lassen sich bzgl. des Gesamtkonzepts machen?

- Es gibt bei dem wie ich es mit Gleichungen I vorhabe deutlich **zwei mögliche Schwerpunkte** im Unterrichtsgang: einerseits den Schwerpunkt auf das handelnde Bewältigen der Gleichungen (=Gleichungen lösen, Gleichungstechnik) und andererseits das vertiefte Verstehen von Gleichungen in ihrem Kontext (Gleichungen als Zahlenrätsel). Von beiden muss ein Mindest- oder Kernmaß dabei sein. Dann gibt es einen Schwerpunkt. Das scheint mir realistisch, weil auch in dieser Klasse wieder die Zeit für Gleichungen lösen und die PLUS-Aufgaben zu knapp ist!
    - ⇨ Wichtiger Hinweis im Lehrerband!
- Mit den Schwerpunkten ist verbunden, dass mir noch mal die beiden Gesichtspunkte von (a) Gleichungen lösen können in (b) einem sinn-erfüllten (Welt-)Kontext klar geworden sind. Wusste ich ja auch schon vorher - hihi. Jetzt ist es mir aber noch mal klarer geworden – besonders auch für den Lehrerband.
- Die beiden Schwerpunkte des Lehrganges: mehr Gleichungen lösen oder mehr (Text-)Gleichungen (aufstellen).
    - ⇨ Wie muss ich das Kopfrechnen „reduzieren" oder modifizieren, wenn ich den Schwerpunkt Gleichungen lösen habe?
    - ⇨ Welches ist der Kernbereich?

  Diese Fragen sind sehr wichtig, da ansonsten die Zeit nicht wirklich reicht und ein stetes Gefühl, es nicht geschafft zu haben, entsteht.
- Was kann im **Konzept ZR im KR in drei Wochen** geschafft werden?

  Diese Epoche war mit einer eher mathematisch-schwächeren Klasse und es waren – bis auf einen Tag – wirklich drei Wochen. Das erscheint mir als realistische Einschätzungsgrundlage (nach unten).

  „Basis"-Konzept (Schwerpunkt Gleichungen lösen):
    - ⇨ **eigentliche Kopfrechnen** intensiv am Anfang; dann abnehmend zu Gunsten der Besprechungsaufgaben; beachte beim Kopfrechnen jedenfalls: Methodenvielfalt, „Warm werden" & Monotonie vs. Steigerung möglich ...; Langeweile vermeiden!
    - ⇨ Zunehmende Besprechungsaufgaben („**Gerade-noch-die-Guten**" etc.), Zahlenrätsel im KR mit **bildhaften Elementen**:
        - L., M.
        - N.
        - Rechen-Kästchen-Methode (nur Bildhaft; als Lösungsmethode für die SchülerInnen ist die Zeit zu knapp; Erweiterungsaspekt für einige?)
        - Gleichung für k
    - ⇨ **Vertraut werden** mit diesen Aufgaben und Bildern ...
    - ⇨ „Theaterstück"-Sprung für die **Idee des symbolischen Lösens** mit der Gleichung für k
    - ⇨ Symbolisches Lösen beginnen ...
    - ⇨ Symbolisches Lösen in einem **neuen (Gleichungs-)Kontext** z.B. mit Taschengeld

Das können alle SchülerInnen verstehen und leisten in der Gruppe. Einige SchülerInnen vertiefen das anfänglich durch die PLUS-Aufgaben.

Beteiligte Menschen

- die 7. Klasse der Rudolf-Steiner Schule Salzburg, darunter ist meine Tochter
- Frau Antje Wienke-Kratschmer (Praxisforscherin)
- Herr Frank Rothe (Praxisforscherin, Dokumentation)

Methoden & Vorgehensweise

1. Methoden der Durchführung

- **Grundlagen** schaffen für die Technik des Gleichungslösens
- Aufstellen von Gleichungen: erst handelnd lösen können, dann systematisch-reflexiv lösen **(Eis-Prinzip)**
- enaktives Erstellen und Lösen von Gleichungen in Form von Zahlenrätseln im **Kopfrechnen**
- Berücksichtigen der **mathematischen Schreibweise als Voraussetzung** für das systematische Aufstellen
- gemeinsame **Besprechungszeiten** für die Anfänge des systematischen Aufstellen von Gleichungen; insbesondere ...
- **Textaufgaben der Sorte** „Die Besten können sie gerade noch lösen!"
- **Selbstständige Übungszeiten** mit PLUS-Aufgaben für den Erforschen von Textaufgaben auf dem Weg zum systematischen Aufstellen von Gleichungen

2. Methoden der Beobachtung & Auswertung

- Unterrichtsbeobachtungen
- teilnehmende Beobachtung
- Lerntagebuch zu den Forschungsfragen (selektives Protokoll) (s. 10 bis 40 Anhang)
- Fotos
- Teambesprechungen
- Wochenzusammenfassungen und ggf. Anpassungen
- **SchülerInnenbefragung**
- Endevaluation

Konkrete Maßnahmen&Handlungen

1. Maßnahmen der Durchführung

- Zahlenrätsel als sinnvolle Textaufgaben verlangen von den SchülerInnen gewissen steigende Fähigkeiten (vgl. 30 Anhang Gesamtkonzept PLUS – Aufgaben)
- Die Besprechungsaufgaben (mit einer großen und kleinen Zahl) bauen sich wie im dargestellten Konzept auf (vgl. 40 Anhang Rätsel und Systematik).

- Die Übersicht von Zahlenrätsel im Kopfrechen mit ihren konkreten Schritten und mathematischen Anforderungsstufen werden beschreiben (vgl. 50 Anhang Zahlenrätsel Übersicht und 60 Anhang konkrete Rätseltypen). Besonders wird auch die mathematische Schreibweise integriert (vgl. 70 Anhang Math. Schreibweise).
- Im Idealfall beschäftigen sich die SchülerInnen nach den Zahlenrätseln, den gemeinsamen Besprechungen und der individuellen Grundlagenarbeit nun entsprechen ihrer mathematischen Fähigkeiten mit den PLUS-Aufgaben. Hier ist selbstständiges Lernen mit Blick auf das systematische Aufstellen von Gleichungen aus Textaufgaben angesagt (vgl. 80 Anhang PLUS-Aufgaben)

2. **Maßnahmen der Beobachtung & Auswertung**

- Unterrichtsbeobachtungen kommen konkret zur Anwendung während der Übungszeiten der SchülerInnen und wenn Antje Wienke-Kratschmer ihre Unterrichtsteile durchführt.
- Teilnehmende Beobachtungen sind relevant, wenn ich mit den SchülerInnen das Kopfrechnen und die Besprechungszeiten machen.
- Das Lerntagebuch werde ich täglich führen. Dabei werde ich mich auf die Forschungsfragen beschränken – außer es fällt mir etwas Besonderes auf.
- Fotos – z.B. von der Tafel mache ich auch täglich. So möchte ich die unterschiedlichen Schritte vom Kopfrechnen zum systematisch-symbolischen Aufstellen von Gleichungen festhalten.
- Die Teambesprechungen sind gedacht als täglich kurze Nachbesprechung, zum Gedankenaustausch, zum Rückfragen und zum Planes des nächsten Schrittes.
- Zusammenfassungen mache ich jeweils zu Wochenende: ergeben sich neue Gesichtspunkte? Kriterien? Ist etwas anzupassen? Was muss noch unbedingt berücksichtigt werden?
- **Am Ende der Epoche machen wir eine Blitz-Befragung der SchülerInnen im Unterricht mit den Fragen:**
    - **Wie fandest du den gemeinsamen Kopfrechenteil?**
    - **Wie fandest du den gemeinsamen (Gelichugs-)Besprechungsteil?**
    - **… den selbstständigen Arbeitsteil?**
    - **… die Hausaufgaben?**
    - **… die PLUS – Aufgaben?**
- Zeitnah nach der Epoche soll die Evaluation erfolgen.

Zeitplanung & Meilensteine

Zeitplan	Meilensteine
erste Epochenwoche	ersten Wochenzusammenfassung
zweite Epochenwoche	zweite Wochenzusammenfassung
dritte Epochenwoche	dritte Wochenzusammenfassung
(gekürzte) vierte Epochenwoche	vierte Wochenzusammenfassung

zeitnah nach der Epoche	Evaluation

In der Praxis stellte sich die Evaluation in zwei Schritten als erforderlich heraus. Es gab eine unmittelbar nach der Epoche stattfindende „Vor-Evaluation" (vgl. 90 Anhang Vor-Evaluation), welche die Erfahrungen der Praxisforschung schon im Wesentlich auf die Ergebnisse und Erkenntnisse hin befragte. Aus Zeitgründen fand die schriftliche Fassung der Auswertung mit Bezug auf die 10 Dimensionen der Praxisforschung erst später im Jahr statt.

Mittel & Materialien

- die **Unterrichtsmaterialien - Grundlagen**: hier arbeiten wir mit speziell ausgearbeiteten Übungsblättern; diese ermöglichen den SchülerInnen ein Lernen des Gleichungslösen in einem individuellen Lerntempo. Dies ist wichtig, um anschließend eine Grundlage für die
- **PLUS-Aufgaben**: vorbereiten (Zahlenrätsel, „Bauernhof-Aufgaben, andere angewandte Aufgaben); dann in der Epoche laufend mitschreiben und entwerfen
- Kopien ca. 45 * 30 = 1350 **Kopien**

Voraussetzungen & Bedingungen

- Das Projekt findet in der Hauptunterrichtszeit statt. Dadurch sind die SchülerInnen noch besonders aufnahmefähig. Gleichzeitig macht der Hauptunterricht viel von ihrer gesamten Lernzeit aus. So können sie sich auch rein zeitlich auf das neue Thema einlassen und hineinarbeiten.
- Wichtig für die Praxisforscherinnen: keine Nebenarbeiten

Anhang

10 Erfahrungen zur ersten Woche

- Es gibt bei dem wie ich es mit Gleichungen I vorhabe deutlich **zwei mögliche Schwerpunkte** im Unterrichtsgang: einerseits den Schwerpunkt auf das handelnde Bewältigen der Gleichungen (=Gleichungen lösen, Gleichungstechnik) und andererseits das vertiefte Verstehen von Gleichungen in ihrem Kontext (Gleichungen als Zahlenrätsel). Von beiden muss ein Mindest- oder Kernmaß dabei sein. Dann gibt es einen Schwerpunkt. Das scheint mir realistisch, weil auch in dieser Klasse wieder die Zeit für Gleichungen lösen und die PLUS-Aufgaben zu knapp ist!
    - ⇨ Wichtiger Hinweis im Lehrerband!
- Mit den Schwerpunkten ist verbunden, dass mir noch mal die beiden Gesichtspunkte von (a) Gleichungen lösen können in (b) einem sinn-erfüllten (Welt-)Kontext klar geworden sind. Wusste ich ja auch schon vorher - hihi. Jetzt ist es mir aber noch mal klarer geworden – besonders auch für den Lehrerband.
- Sind die **Tipps** gut genug für die SchülerInnen? D.h. bringen die Tipps die SchülerInnen so in Schwung, dass sie die Aufgaben flüssiger hinbekommen? Oder helfen die Tipps nicht viel weiter? Und gibt es Tipps mit besonderer Qualität? Tipps überprüfen!
    - ⇨ Tipps mit besonderer Qualität –wie z.B. Lsg-strategie vermitteln (z.B. eine ähnliche leichtere Aufgabe zu machen)

- ⇨ Tipps helfen nicht genug. Vielleicht noch einen Schritt weiter in der Erklärung gehen (z.B. Kürze! Ein Kürzungsbeispiel hinschreiben; Wissen zur Verfügung stellen und nicht nur den Tipp nach welchem Wissen sie suchen müssen. Das sind ja zwei Schritte dann ...). Das erscheint mir nach dieser Woche durchaus vereinbar mit der Grundidee der Tipps, rechentechnisch vielfältigeren Aufgaben lösbar zu machen – und dabei nicht zu leicht lösbar zu machen, weil die SchülerInnen sowieso erst mal alleine zu lösen versuchen! Weil es spannender ist, schneller geht und den Tipp nachzuschlagen erst mal umständlicher ist

- Die rechnerisch vielfältigeren Rechnungen sollen auch Wissen vernetzen.
  - ⇨ Lehrerhinweis

20 Erfahrungen zur zweiten Woche (= 3 Tage)

- Erfolg der Woche: die Idee der bildhaften Rechenweise (mit den Kästchen in einer Reihe). Das gehört unbedingt noch im Konzept ergänzt
  - ⇨ Bildhafte Rechen-Kästchen-Weise einbauen
- Die andere Art zu Denken für die Überschüsse fanden sie nicht so toll – anders denken wozu?
- Alle SchülerInnen sind in die mathematische Welt eingetaucht!
- Die Gemütlichkeit der Klasse ist wohl ein Grund dafür, dass die SchülerInnen noch nicht zu PLUS gekommen sind. Auch meine ausprobierende Beschäftigung mit der Frage der Schwerpunkte des Lehrganges ist hierfür verantwortlich. Jedenfalls ...
  - ⇨ ... wollen wir in der kommenden Woche durch gezielte Differenzierung und ermunterndes Ansprechen einige SchülerInnen zur Beschäftigung mit den PLUS-Aufgaben bringen.
- Die beiden Schwerpunkte des Lehrganges: mehr Gleichungen lösen oder mehr (Text-)Gleichungen (aufstellen).
  - ⇨ Wie muss ich das Kopfrechnen „reduzieren“ oder modifizieren, wenn ich den Schwerpunkt Gleichungen lösen habe?
  - ⇨ Welches ist der Kernbereich?

  Diese Fragen sind sehr wichtig, da ansonsten die Zeit nicht wirklich reicht und ein stetes Gefühl, es nicht geschafft zu haben, entsteht.

30 Erfahrungen zur dritten Woche

- **Erfolg der Woche**:
  - a) die SchülerInnen werden sicherer im Umformen. „Es setzt sich ab (Heike)!“
  - b) Überschüsse als Rechenvorhaben anschreiben – fix!
  - c) Die PLUS-Aufgaben für die zweite Woche sind fertig!
  - d) Der erste (Verständnis-)Schritt vom bildhaften Zahlen-Rätsel zum symbolischen Lösen der Gleichung (für k) ist – anhand des kleinen Theaterstückes – gut angekommen
  - ⇨ Nächste Woche geht es noch um ein erstes gewöhnen und und (gemeinsames) Ausprobieren der neuen Methode.
- Die **bildhafte Kästen-Rechen-Erklärung** ist bei den SchülerInnen angekommen. Aber sie ist für sie ein statisches Erklärungsmodell. Es ist keine bildhafte

Lösungsmethode geworden, was in Anbetracht er kurzen Zeit in meinem Konzept auch nicht verwundert. Das zweite Erklärungsbeispiel fiel ihnen dann schwer ...

⇨ Kann die Kästchen-Rechen-Erklärungsmethode mehr als nur im statischen Sinne verwendet werden? Braucht es dafür ein Extramodul? In welcher didaktischen Situation wäre dass interessant? 6. Klasse? Voraussetzungen?

- **Problem** dieser SchülerInnen: Sie sehen wenig und ziehen wenig Querverbindungen. Fast alles ist für sie immer wie neu. So wirken sie langsam ...

  ⇨ **Wiederholen und Erinnern** d.h. die (Quer-)Verbindung an bisheriges: hier ist ihnen zu helfen (z.B. durch anschauliche Hilfen, die Anschauung)

  ⇨ Inhaltliche Querverbindungen **zwischen verschiedenen Darstellungsformen** mit ihnen üben (z.B. Text und Gleichung)

  ⇨ Inhaltliche Querverbindungen zwischen altem und einer neuen Situation mit ihnen als **Analogie / Entsprechung** üben.

  ⇨ **Genug Lernzeiten** einrichten, in denen sie dann das gemeinsame Querverbinden selber anwenden und erproben können.

- Und eines ist mir auch noch mal besonders deutlich geworden. Für die **Neuüberarbeitung** brauchen die Lehrer unbedingt neu didaktische Hinweise (=C). Das hat sich insbesondere bei den Einführungen zu den Überschüssen und dem Umformen gezeigt (s.u.). Auch Christine Bolleters Nachfragen zeigen, dass bei meinen Hinweisen noch weiterer Bedarf besteht!

  ⇨ C forciert weiterbetreiben

- Wenngleich die SchülerInnen nun sicherer werden, war dies doch ein Prozess. Die SchülerInnen sind mit den **Überschüssen und dem Umformen sehr durcheinander** gekommen. Und zudem war dann noch das Zusammenfassen, bei dem nur auf einer Seite etwas getan wird, ein spezielles Problem. **Wichtig**:

  ⇨ Überschüsse als Rechenvorhaben anschreiben! (als Hinweis, wie zu denken ist; als Integration in und Unterscheidung zum Umformen)

  ⇨ Unterschiede – jedenfalls beim Umformen am Bild der Waage – genau zwischen dem Zusammenfassen (als nur auf einer Seite verschieben) und im weiteren dem Rückgängigmachen (auf beiden Seiten).

- Wenngleich die SchülerInnen nun sicherer werden, war dies doch ein Prozess. Ein echtes **Epochentief** hatten wir am Dienstag (Heike). Doch dann war das richtig verfolgen und die SchülerInnen sind richtig viel weitergekommen. Die Inhalte setzen sich. Allerdings hat sich die Klasse auch geteilt: die Langsameren und die schneller, abstrakt Denkenderen. Nun haben wier die **Differenzierung** offiziell gemacht.

  ⇨ Vorsicht! Überschätzung & Faulheit noch beachten

- Der erste (Verständnis-)Schritt vom bildhaften Zahlen-Rätsel zum symbolischen Lösen der Gleichung (für k) ist – anhand des kleinen Theaterstückes – gut angekommen. Die **beiden unterschiedlichen Rechenmethoden** – die des ausprobierenden Knobelns und die des systematischen Gleichung Aufstellens – sind deutlich geworden – jedenfalls in der Theaterstücksituation. Vor allem: die symbolische Verwendung der Gleichung für die kleine Zahl scheint akzeptiert. Die SchülerInnen **konnten trennen zwischen** den bildhaften Entitäten der kleinen und großen Zahl einerseits und dem reinen Gleichung lösen durch Umformen andererseits. Was war dabei hilfreich? Das ganz klar, d.h. äußerlich anschaulich (zugeklappte Tafel, Ausspruch von Max im Stück, wurde: ich muss das Zahlenrätsel nicht kennen, um die Gleichung (für k) lösen zu können.

- ⇨ Jetzt gilt es mit ihnen noch erste gemeinsame und gewöhnende Schritte in der systematischen Methode zu machen

- Die Tipps überarbeiten!!!
  - ⇨ Tipps überarbeiten!

40 Erfahrungen zur vierten Woche

- Die Umsetzung des „Theaterspieles" vom Freitag d.h. die **gezielte und bewusste Anwendung der Gleichung für k** an einer Beispielaufgabe (mit drei Zahlen) war für die SchülerInnen in der Klasse/Gruppe kein Problem. Das spricht für eine gute Verständnisgrundlage.
- Den Umstieg am folgenden Tag auf einen **neuen (Gleichungs-)Kontext** schafften die SchülerInnen gut. Die Taschengeldsituation ist ihnen gut geläufig. Das Problem ließ sich überraschend schnell in der Gemeinschaft systematisch lösen.
  - ⇨ Taschengeldkontext für die PLUS-Aufgaben wählen.
  - ⇨ Taschengeldkontext auch in ZR-Konzept für C integrieren.
- Was kann im **Konzept ZR im KR in drei Wochen** geschafft werden?

  Diese Epoche war mit einer eher mathematisch-schwächeren Klasse und es waren – bis auf einen Tag – wirklich drei Wochen. Das erscheint mir als realistische Einschätzungsgrundlage (nach unten).

  „Basis"-Konzept (Schwerpunkt Gleichungen lösen):

  - **eigentliche Kopfrechnen** intensiv am Anfang; dann abnehmend zu Gunsten der Besprechungsaufgaben; beachte beim Kopfrechnen jedenfalls: Methodenvielfalt, „Warm werden" & Monotonie vs. Steigerung möglich ...; Langeweile vermeiden!
  - Zunehmende Besprechungsaufgaben („**Gerade-noch-die-Guten**" etc.), Zahlenrätsel im KR mit **bildhaften Elementen**:
    - L., M.
    - N.
    - Rechen-Kästchen-Methode (nur Bildhaft; als Lösungsmethode für die SchülerInnen ist die Zeit zu knapp; Erweiterungsaspekt für einige?)
    - Gleichung für k
  - **Vertraut werden** mit diesen Aufgaben und Bildern ...
  - „Theaterstück"-Sprung für die **Idee des symbolischen Lösens** mit der Gleichung für k
  - Symbolisches Lösen beginnen ...
  - Symbolisches Lösen in einem **neuen (Gleichungs-)Kontext** z.B. mit Taschengeld

  Das können alle SchülerInnen verstehen und leisten in der Gruppe. Einige SchülerInnen vertiefen das anfänglich durch die PLUS-Aufgaben.
- **Kurzanmerkungen aus dem SchülerInnenfeedback:**
  - **ZZR – Besprechungsaufgaben**: amüsant, interessant, haben von niemandem eine negtive Kritik bekommen

- **Eigentliches Kopfrechnen**: später dann langweilig; man hat es dann raus; keine Steigung mehr möglich

⇨ didaktische Überarbeiten (s. a. oben)

- **Differenzierung**: Langeweile bei zu viel ähnlichen Zahlen/Rechnungen Übungen; Zeitgewinn

⇨ Differenzierung jedenfalls - auch im Schwerpunkt Gleichungen-Lösen – einbauen bzw. betonen

- **Tafelaufgaben**: teils zu langweilig; teils auch mehr Zeitbedarf für die Übungen

⇨ Tafelaufgaben überarbeiten, raffen, konzentrieren, Lehreranmerkungen

50 Erfahrungen Kurzfeedback

Überarbeitetes Protokoll vom Blitzfeedback
am (letzten Tag) 29.3.2012

gem. Arbeitszeit jetzt KR

zu viel.
=> raffen;
Tafel aufg.
Überdenken
**

* Omnimunde? Tobias Matthias

sehr oft die
gleichen Zahlen
(David, Leo)
-> bei der Üb.
-> langweilig
=> Diff

nur noch
schreiben –
kein
Rechnen
mehr

selbst. Arbeitszeit

B_2 [illegible]

(David)
anspruchsvoll

Gut |||| ||||
B3 insg. o.K.

B_1 war letztes zu schwer
~~(Oliver)~~ (Oliver)

Probl. |||

nicht fertig..

Diff

J-Hü
||| |
||| sehr o.K.
inhaltlich
gut
und zu viel
knapp.

Hausgw. im gem. Arbeitsteil
Felix

- wiederholt langweilig

Ja

(2) (**)
nicht
kurz

Nein ~~||||~~ ||||

zu große keine Steigerung mehr
(1b)

zu Dauer lang
weilig weil es
1a) jeden Tag wo

anwendt

(1) KR manchmal zu langweilig
im Kopf

1c) => Methodenvielfalt
=> Lücken, weil man fast
=> Vielfältigere

(3) jeden Tag das selbe
an der Tafel wiederholt
(Wiederholungen auf)
Umformen

(**) irgendwie doch nicht
wenig behandelt

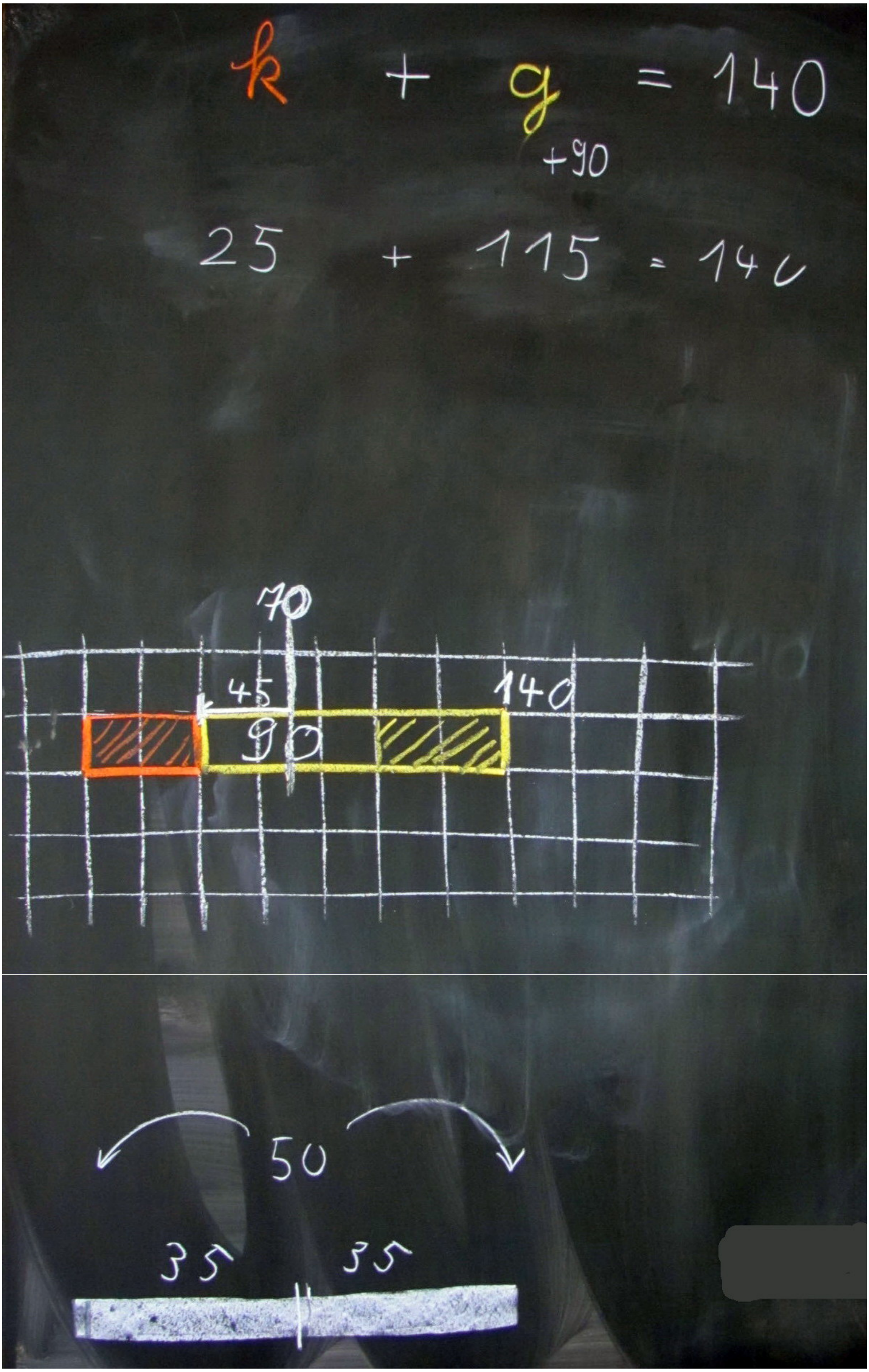
Plus-Aufg.

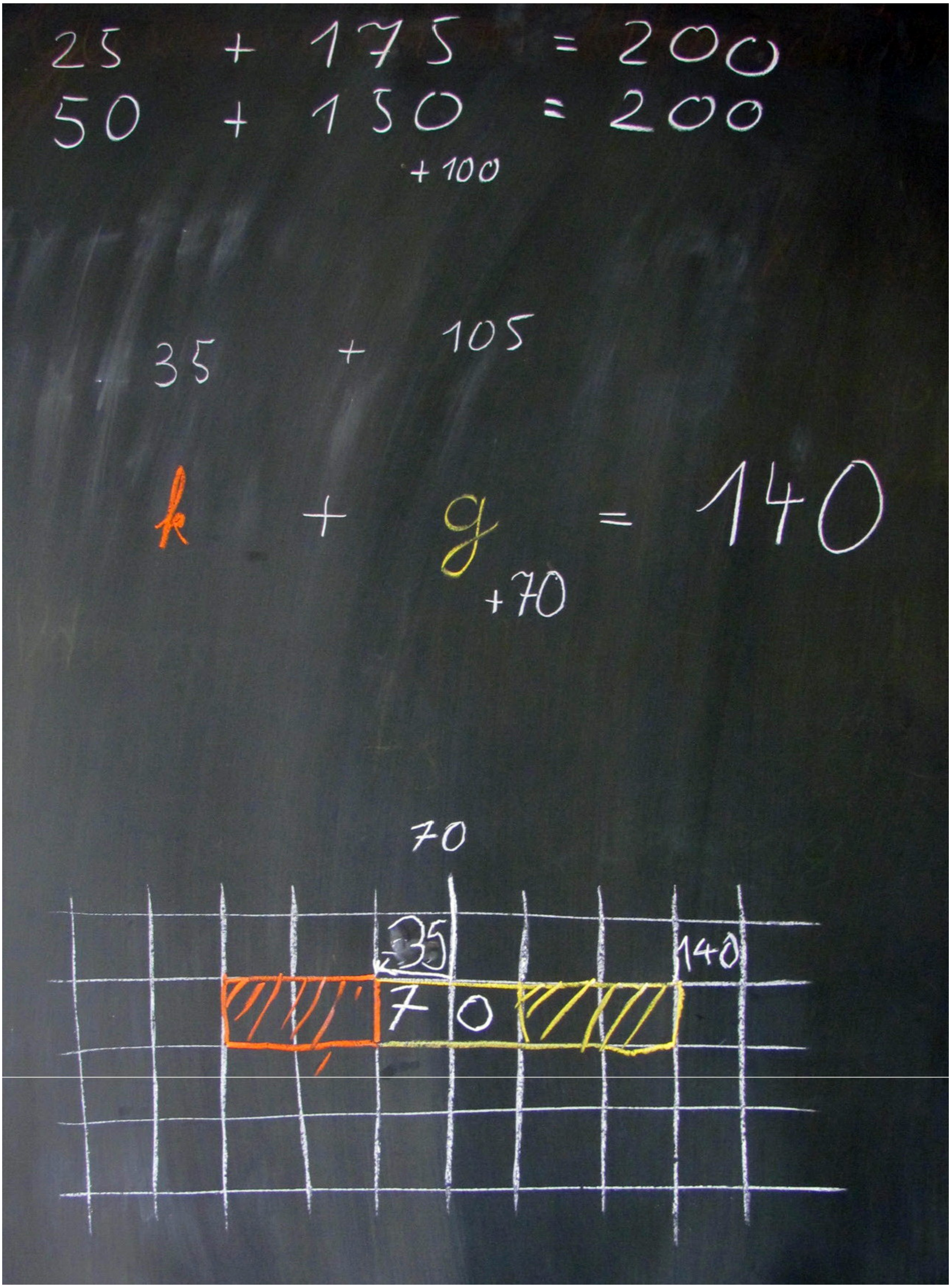
| interessant, kurz,
abwechselnd

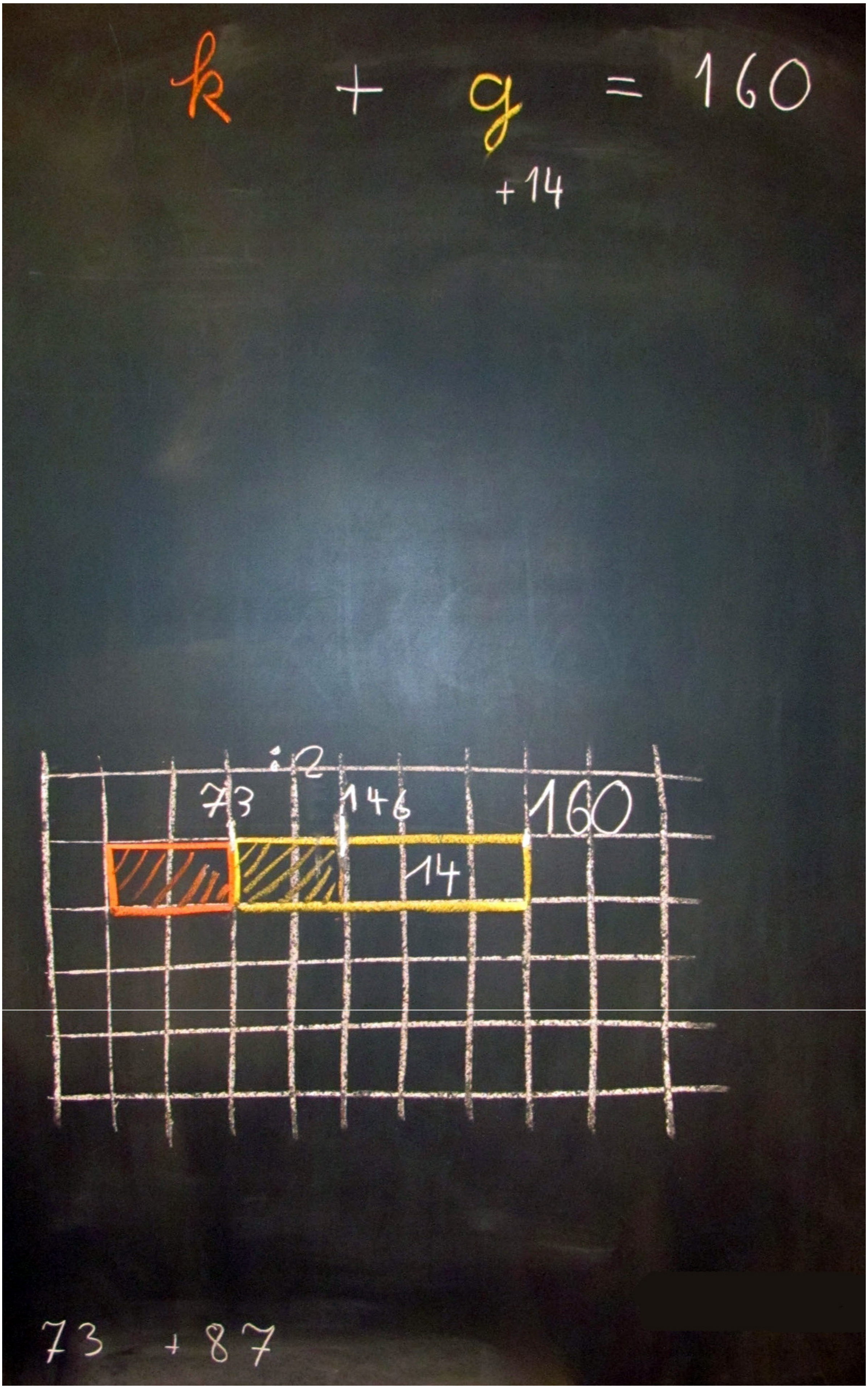
(1) => Gl. Speziell fülle
- Zellen gegen - Stabgröße
- echte Knobelzahlen
wie $\frac{x}{2} = \frac{1}{x}$

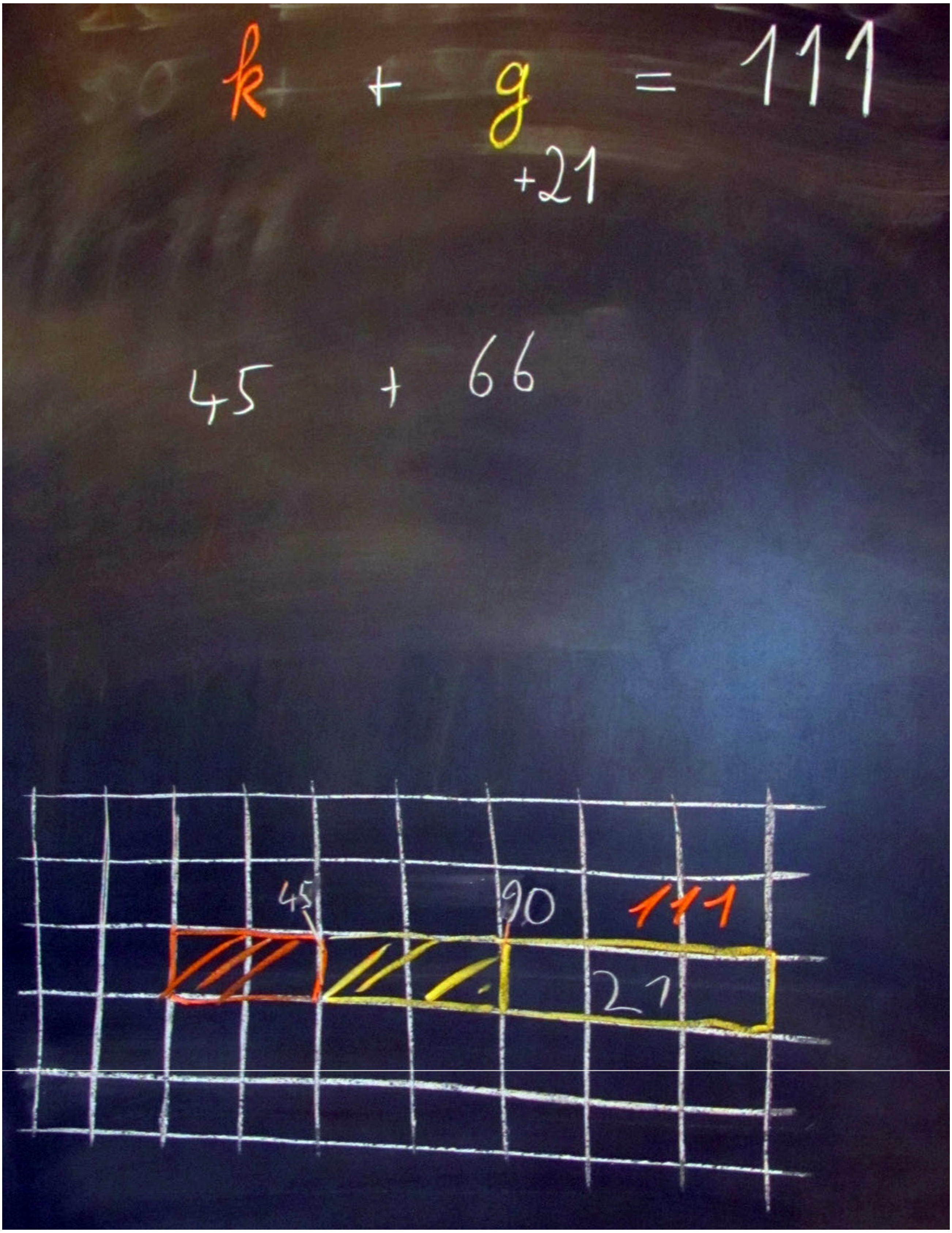
- "schwierige" Zahlen
! - andere Zahlen

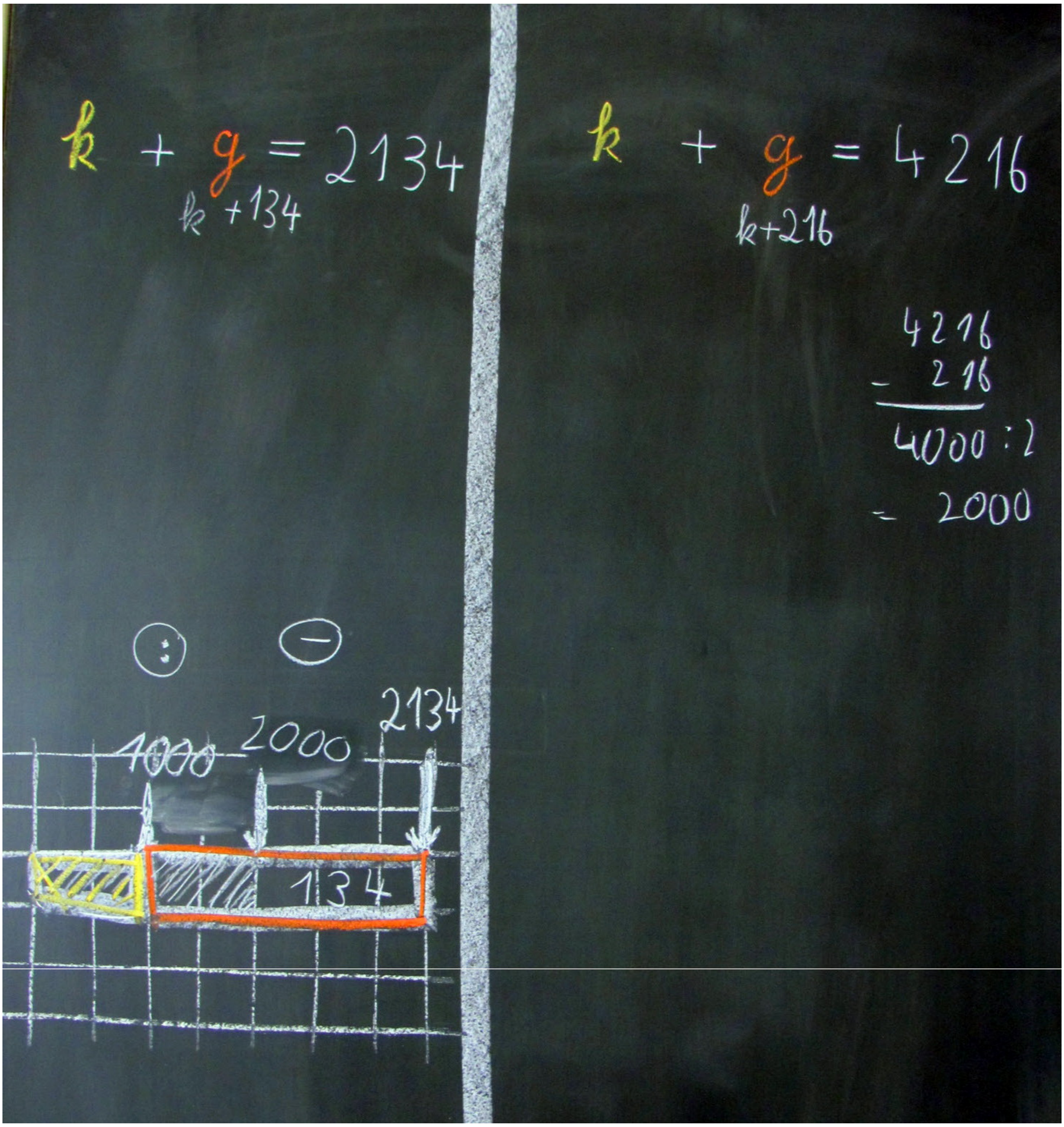
60 bildhafte Kästchenmethode



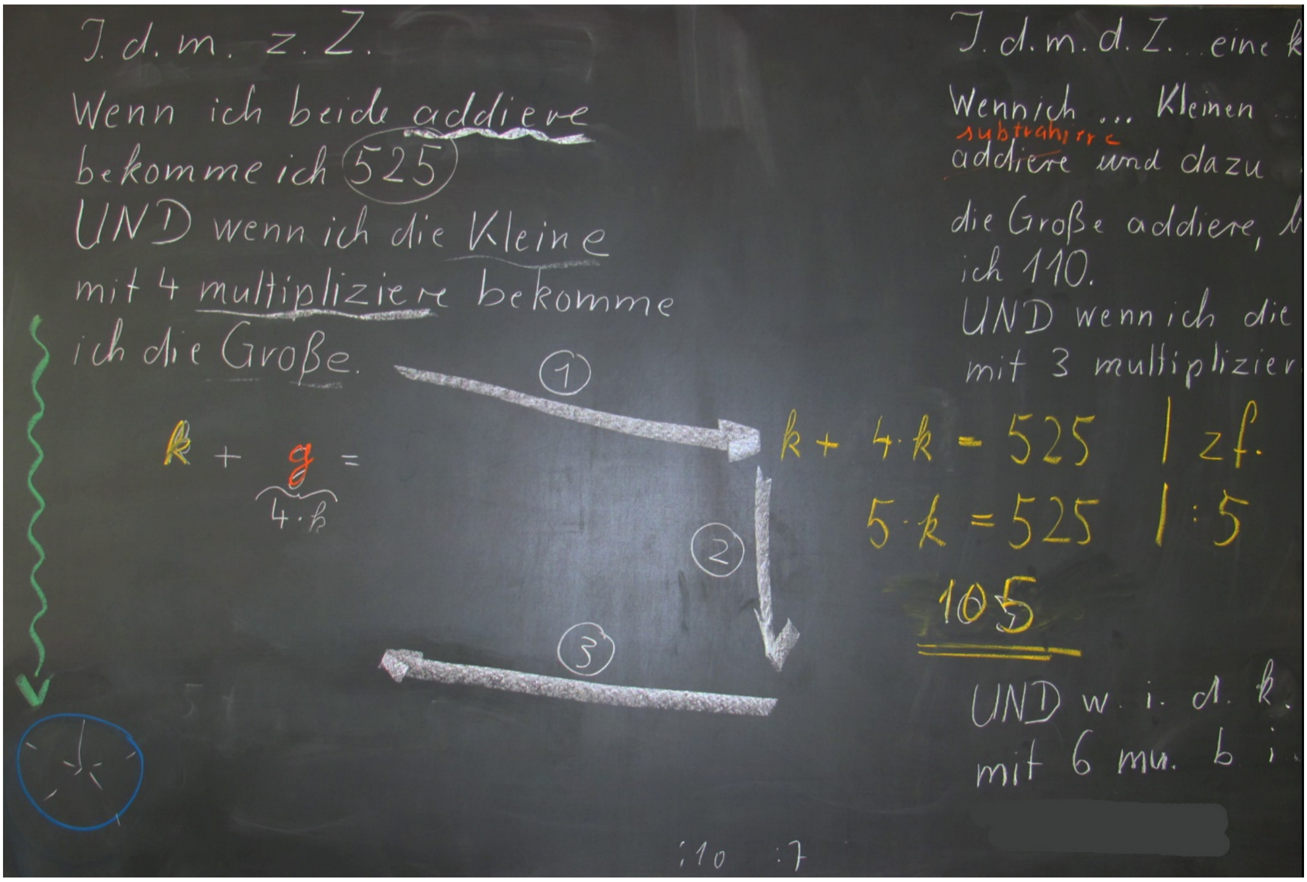

25 + 175 = 200
50 + 150 = 200
+100
35 + 105
k + g = 140
+70
70
35
140
7 0

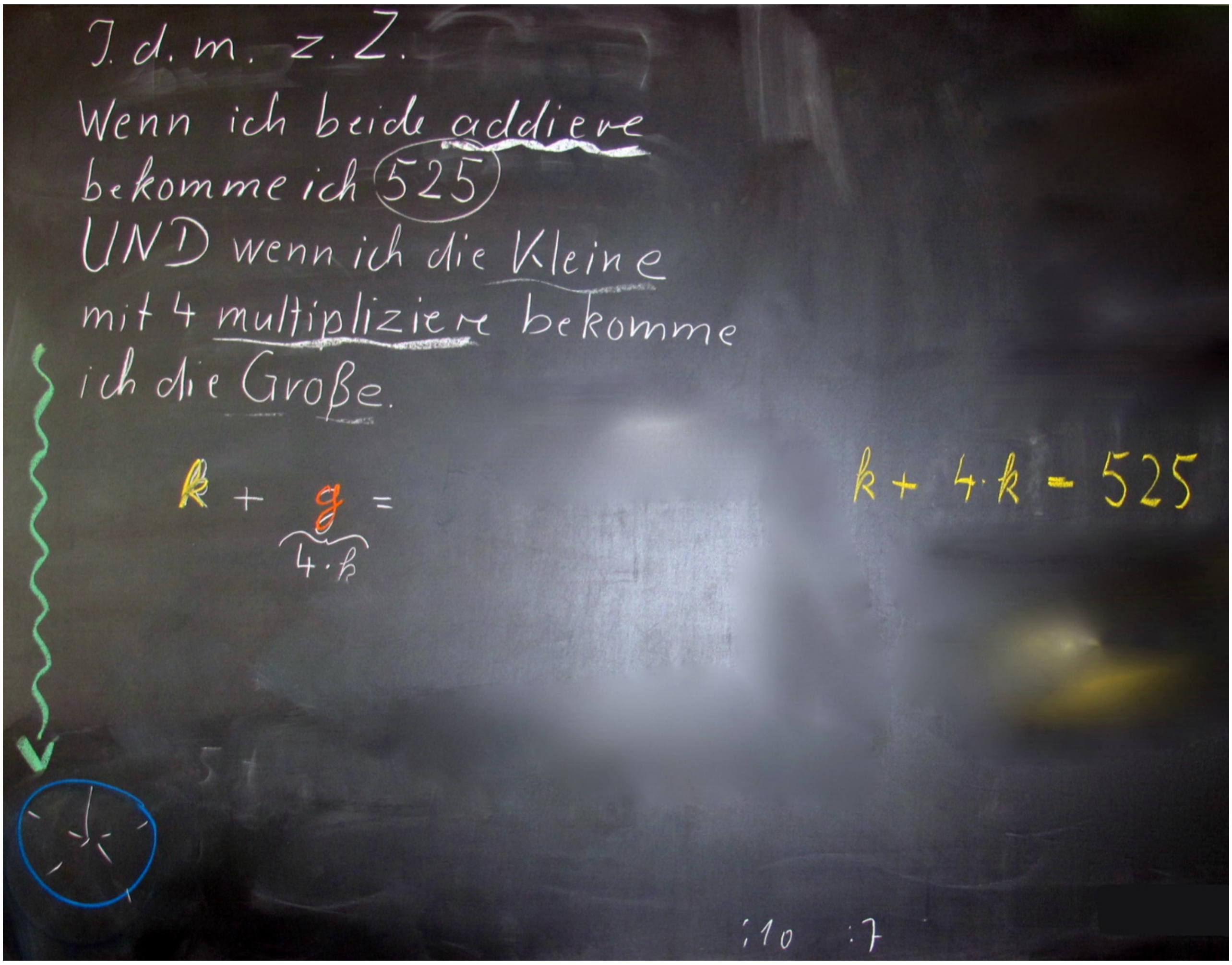

k + g = 160
+14
:2
73
146
160
14
73 + 87

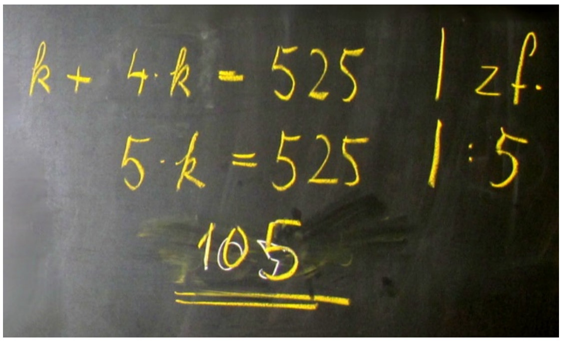

k + g = 111
+21
45 + 66
45
90
111
21

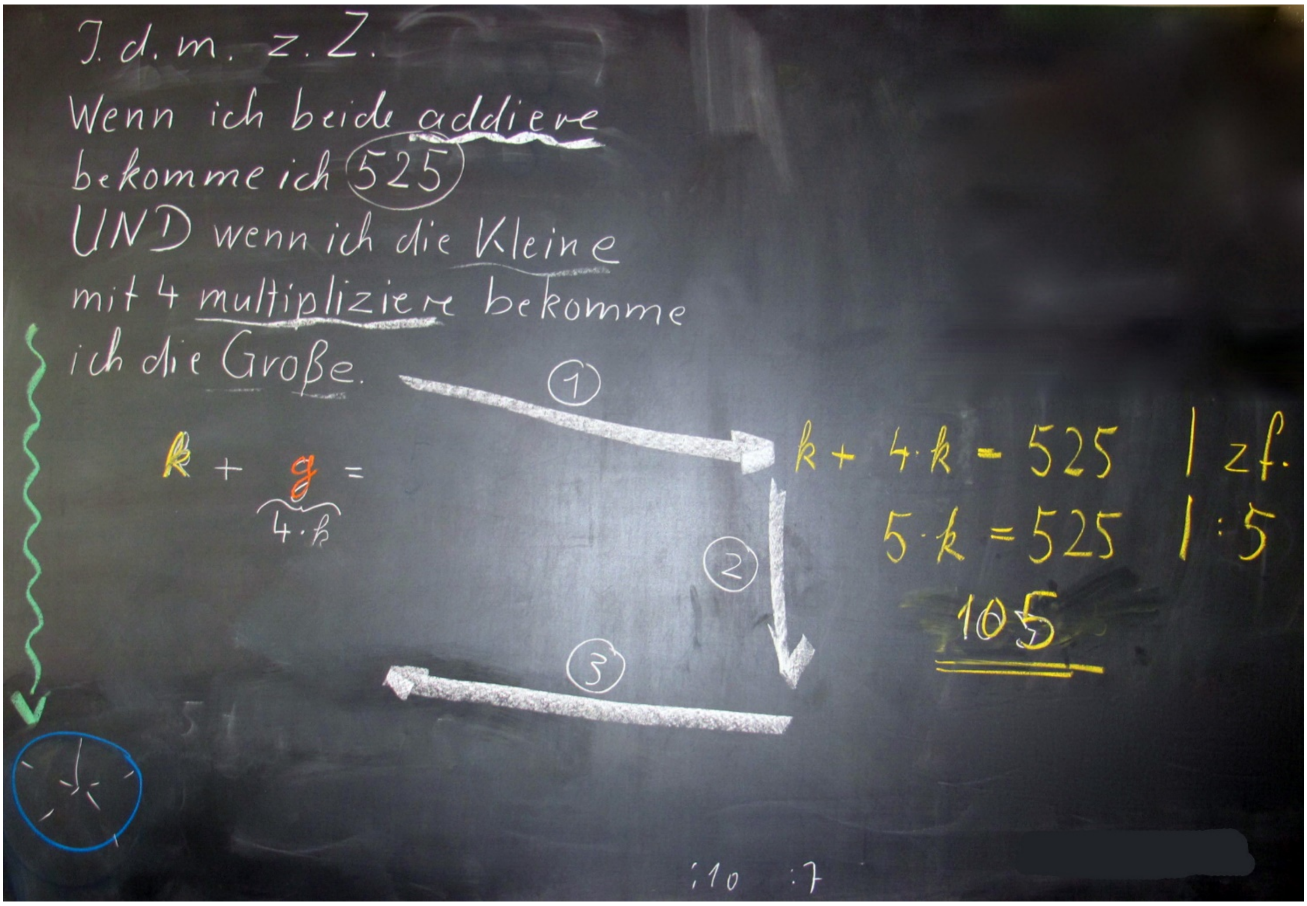

k + g = 2134
k +134
k + g = 4216
k+216
4216
- 216
4000 : 2
= 2000
:
-
2134
4000
2000
134

70 Theaterstück



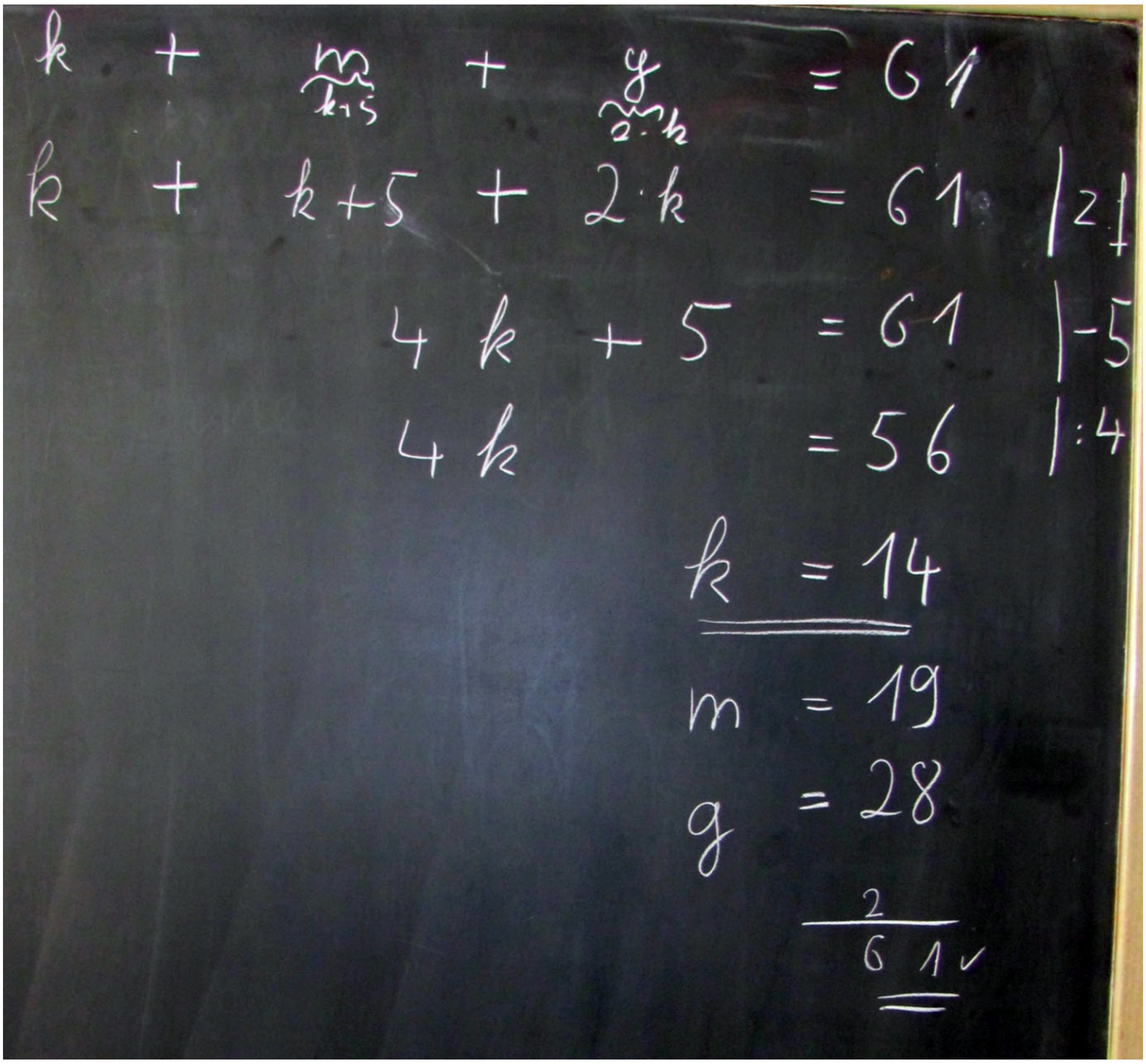


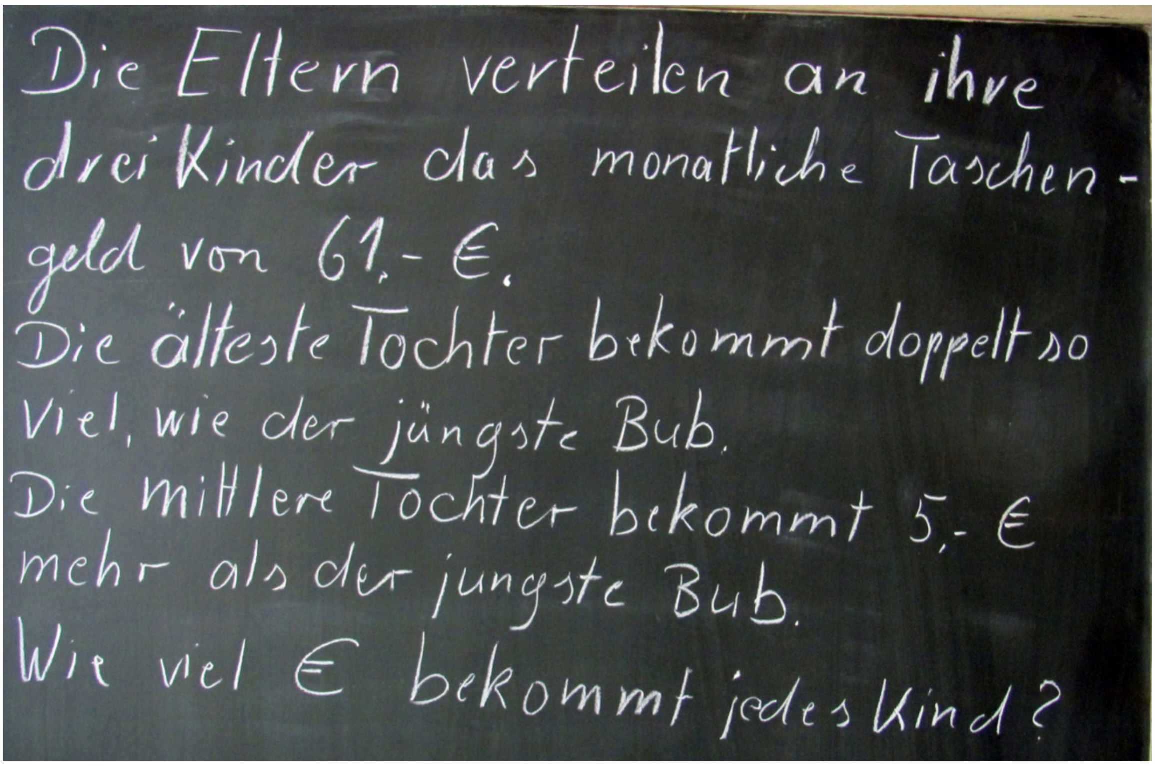

k + 4·k = 525 | zf.
5·k = 525 | : 5
105


J. d. m. z. Z.
Wenn ich beide addiere
bekomme ich 525
UND wenn ich die Kleine
mit 4 multipliziere bekomme
ich die Große.
1
k + g =
4·k
k + 4·k = 525 | zf.
5·k = 525 | : 5
105
2
3
:10 :7

80 Übertragung vom Theaterstück

90 Kontextänderung

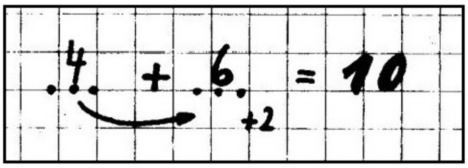
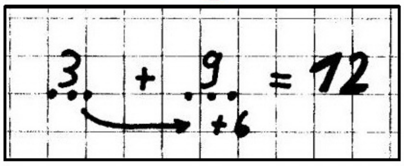


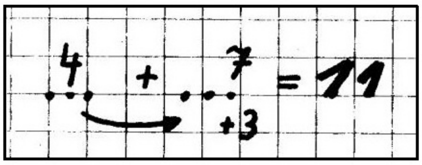
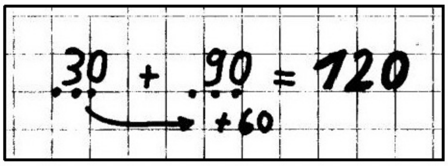


Material

Vom Rätsel zum systematischen Lösen am Beispiel von Zwei-Zahlen-Rätseln im Kopf-rechnen

(Stufen der Verinnerlichung und Abstraktion)

	Beispiel	Struktur, mathem. Anforderung (steigend)	Charakter, Darstellungsform, Warum?
1.	**Beispiel für die (Grund-)Stufe 1.1:** Das Zahlrätsel mündlich formulieren und an der Tafel mit notieren  Die Lösung des Zahlenrätsels: 	**(Grund-)Stufe 1.1** • Rechnen im Zahlenraum bis 10 bzw. 12 • Das Resultat ist eine gerade Zahl (1.1)	• Auf dieser **gesamten ersten Stufe** (von 1.1 bis 1.3) geht es ausschließlich darum, die Lösungen / die beiden Zahlen zu sehen / herauszubekommen, ein Gefühl für die Existenz der beiden Zahlen zu bekommen • Das (elementare) **Lösen im Kopf soll gekonnt werden.** • Natürlich gibt es viele Zwischenstufen und andere interessante Zwei-Zahlen-Rätsel. Anspruchsvollere Zahlenrätsel bieten sich als „**Rätsel des Tages**“ für die schnellen Rechner/innen an.
	Beispiel für die Stufe 1.2: Beide Zahlen sind ungerade. 	**Stufe 1.2** • auch noch Rechnen im Zahlenraum bis 10 bzw. 12 • Die beiden Zahlen oder das	Anm.: Es ist merkwürdig. Aber die Schüler/innen kommen nicht so schnell auf die Lösung, wenn ungerade Zahlen im Spiel

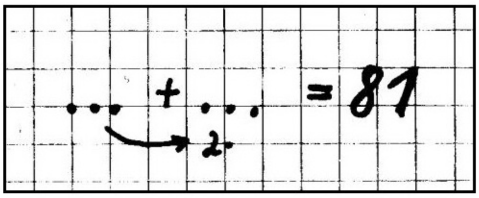
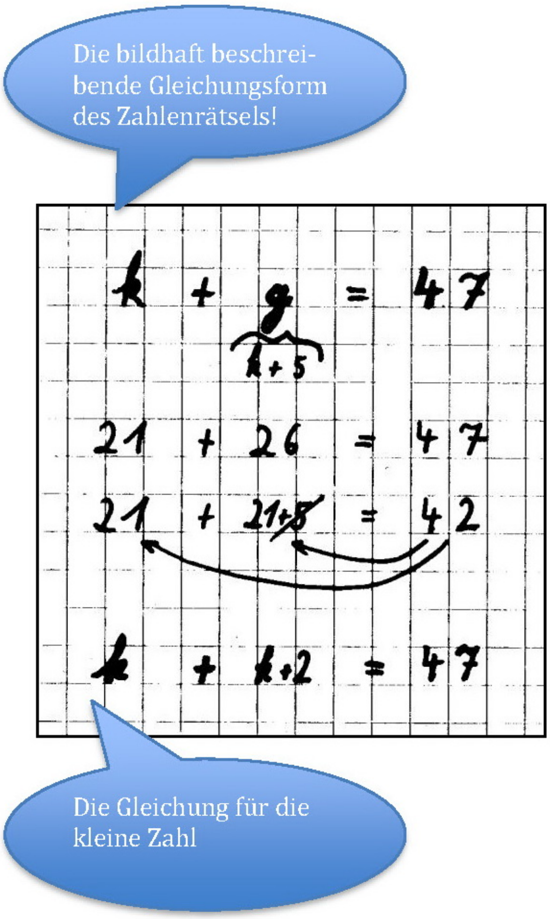
	Das Resultat ist ungerade.  	Resultat sind ungerade Zahlen (1.2)	sind. Und auch: Je weiter die kleine und die große Zahl auseinander sind, desto schwieriger empfinden sie die Aufgabe.
	Beispiel für die Stufe 1.3: Beide Zahlen sind ungerade.  	**Stufe 1.3** • ganz ähnlich wie zuvor ... • jedoch in höherem Zahlenraum; das Resultat ist 100 oder 120 und ... • die beiden Zahlen unterscheiden sich um „gerade 10er“, d.h. 20, 40, 60, ... • (Für einige ist es auch spannend den Zahlenraum weiter auszudehnen auf 1000 oder 1200 usw.)	Anm.: Hauptziel dieser (Übergangs-)Stufe 1.3 ist die Vorbereitung des nächsten größeren Schrittes zur nachfolgenden Stufe 2. Mit den höheren Resultaten und gleichzeitig „runden“ Zahlen (=sehr ähnliche Zahlenbeziehungen wie bei wie Stufe 1.1. und 1.2) kommen die Schüler/innen in einen neuen aber doch vage bekannten Zahlenraum.
2			
	Erstes Beispiel für die Stufe 2: Das Zahlrätsel mündlich formulieren und an der Tafel mit notieren (von Ludwig & Mona).	**Stufe 2:** • Der Unterschied zwischen der kleinen und der Großen Zahl ist jetzt eine ungerade Zehnerzahl d.h. 10, 30, 50 usw. Die Schüler/innen müssen die Zehner aufteilen ... • ... je größer der Unterschied beider Zahlen ist, desto un-	**„Gerade-noch-die-Guten-Erklärungsaufgabe“:** • Grundcharakter dieser Aufgaben ist noch: Ausprobierend knobelnd jedoch ... • ... mit dem unmittelbaren Ausprobieren kommt man kaum noch ans Ziel – von den guten Rechner/innen lernt man deren Lösungsstrategie ... • Wie lauten die

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
</td>
<td>gewohnter ...
• In weiteren Übungen kommt allmählich eine neue bildhaft-beschreibende Schreibweise hinzu (vgl. 2. Beispiel)

Vgl. Foto Internet</td>
<td>beiden Zahlen?
• Die flotten Rechner/innen erklären ihren Lösungsweg.
• Dieser wird an der Tafel mit konkreten Zahlen bildhaft mitskizziert.
• Hierbei wird die knobelnd-ausführende Kopfrechentätigkeit allmählich in eine bildhaft-beschreibende Form überführt.</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>Dazu Übungen, mit dem Lösungstrick von Ludwig und / oder als Knobelaufgbe</td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>Zweites Beispiel für die Stufe 2:
Das Zahlrätsel mündlich formulieren und an der Tafel mit notieren (Nadine).

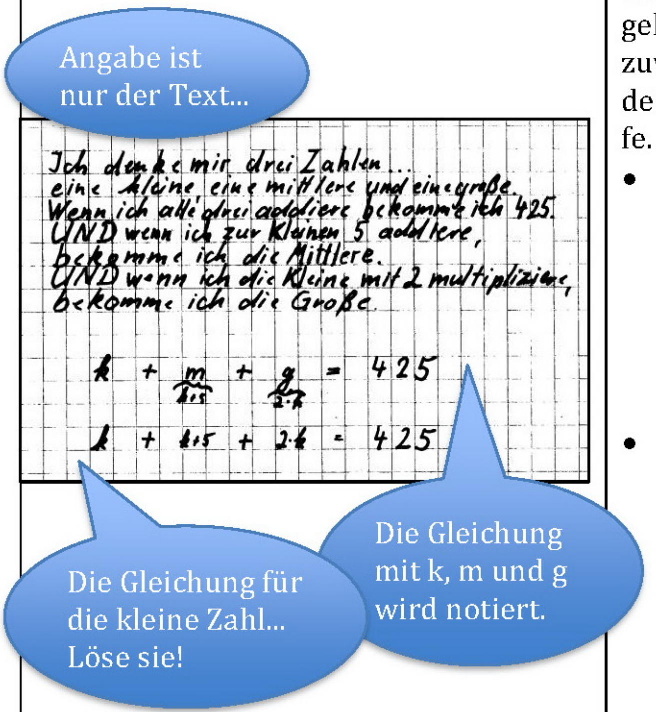
</td>
<td>• Das zweite Beispiel ist Mathematisch nicht schwerer als das erste. Die Große Zahl ist lediglich ein Vielfaches der kleinen.
• Der wesentliche Unterschied liegt in der Schreibweise ... (s. nebenan).

• Allmählich wird die Gleichung für die kleine Zahl eingeführt (s. Übergangsstufe)</td>
<td>• Die bildhaft-beschreibende Darstellung und Schreibweise ermöglicht ein schnelleres und an umfassenderen Lösungsmustern orientiertes Bearbeiten der Zahlenrätsel.
• Dabei sind die verwendeten Symbole noch immer durch ihren eigenen Kontext motiviert und dienen ausschließlich dessen besserer Beschreibung, z.B. k für kleine Zahlen
• Auch die allmählich eingeführte</td>
</tr>
</table>

		• Natürlich kann nun das **Zahlenrätsel als Text** angegeben sein. Die Schüler/innen formulieren dann zunächst das Zahlenrätsel in der Schreibweise mit k und g. Vgl. Foto im Internet	Gleichung für die kleine Zahl hat zunächst – auf der 2. Stufe - einen bildhaft-beschreibende Funktion (s. Übergangsstufe) • •
	Dazu Übungen, mit dem Lösungstrick von Nadine und / oder als Knobelaufgbe		
	Beispiel für die Übergangsstufe (1. Schritt): 	• Zunächst wird das Zwei-Zahlen-Rätsel wie bisher in der bildhaft beschreibenden Schreibweise gelöst. • **Ergänze und hinterfrage**: „Hier für haben Mathematiker noch eine andere Schreibweise des Zahlenrätsels ... (anschreiben)... Ist das wirklich noch das gleiche Zahlenrätsel? Wo ist die große Zahl geblieben? erst nur anschreiben und formulieren lassen. • Bei einem späteren Beispiel	**Gleichung für die kleine Zahl** • Sie ist ein wesentliches Übergangselement vom bildhaft-beschreibenden zum symbolisch-begrifflichen Umgang mit Zahlenrätseln bzw. Gleichungen. Sie gehört mit der ersten Hälfte zur 2. Stufe und mit der zweiten Hälfte zur. 3. Stufe. • Im ersten Schritt dient sie dem bildhaften Beschreiben des mathematischen Rätselzusammenhanges zwischen den beiden Zahlen. Dabei wird besonders die unmittelbare Beziehung zwi-

		wird die Gleichung für die kleinere Zahl auch selber als Zahlenrätsel **formuliert**. • Spätestens jetzt ist es den Schüler/innen eine große Hilfe, wenn sie in der „mathematisch-algebraischen Schreibweise von Zusammenhängen“ geübt sind (vgl. „Zur mathematischen Schreibweise“ S. XXX) • Übungen zum Aufstellen der Gleichung für die kleine Zahl • Allmählich kommt die Frage: „Wer kann mir (zum Text des) Zahlenrätsel direkt die Gleichung für die kleinere Zahl ansagen?“	schen der kleinen und der größeren Zahl untereinander berücksichtig und zwar mit dem Augenmerk auf der kleineren.
	Beispiel für die Übergangsstufe (2. Schritt):	• Das Zahlenrätsel steht als Text an der Tafel. • „Schreibt das Zahlenrätsel doch bitte mit k	• In diesem zweiten Schritt wird die Gleichung für die kleinere Zahl weniger als bildhafte Beschreibung des Zahlenrätsels betrachtet. Vielmehr werden nun die

	Ich denke mir zwei Zahlen... Wenn ich beide addiere bekomme ich 40. UND wenn ich zur Kleinen 6 addiere, bekomme ich die Große. $k + \underbrace{g}_{k+6} = 40$ $k + k+6 = 40$	und g auf.“ • „Kann mir jemand direkt die Gleichung für die kleine Zahl ansagen? Die Gleichung für die kleinere Zahl wird selber noch mal in Worten formuliert. • Idee: „Sieht jemand die beiden Zahlen? Oder **zumindest die Kleine**? Schaut euch doch einmal genau die Gleichung für die kleine Zahl an.“ • Die Gleichung für die kleine Zahl wird als eigenständiges Zahlenrätsel betrachtet. Wie könnte ich (die Gleichung) dieses **neuen Zahlenrätsels** lösen? Durch Rückgängig machen, Umformen ... gemeinsam an der Tafel lösen. • Wichtig: Und was ist jetzt mit der größeren Zahl des ursprünglichen Zahlenrätsels? Stelle anschließend den Zusammenhang wieder her. • Einige Beispiele	verwendeten Symbole und Zeichen in ihrer rein mathematischen Bedeutung aus dem Kontext des **ursprünglichen** Zahlenrätsels abstrahiert. • D.h.: Es ist (zunächst) nicht mehr die Rede von einer kleinen und großen Zahl sondern die Gleichung mit dem k ist zu lösen ... • Diese Gleichung wird nach allen Regeln der (Gleichungs-)Kunst umgeformt und gelöst. Alleine die den Symbolen und Zahlen innewohnende mathematische Bedeutung bestimmen das weitere Vorgehen. Das ist die symbolisch-begriffliche Stufe des Lösens von Gleichungen. • Hierbei entsteht die Notwendigkeit, die gelöste Gleichung anschließend wieder in den Kontext des ursprünglichen Zahlenrätsels zurück zu führen. •

<table>
<tr><td></td><td></td><td>wären in der nächsten Zeit gemeinsam mit den Schüler/innen zu rechnen, damit sie vertraut werden mit dem Abstrahieren, dem symbolischen Lösen und dem Wiedereinbinden.</td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td>weitere systematische Zahlenrätsel ...</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Erstes Beispiel für die 3. Stufe:
Ein längeres Zahlenrätsel ...

</td><td>Zunächst werden noch Zahlenrätsel gelöst – wie schon zuvor im 2. Schritt der Übergangsstufe.

Verstehe das Zahlenrätsel und beschreibe es in der Schreibweise mit k und g.
Wie lautet die Gleichung für die kleine Zahl? Löse sie!
Was besagt das Rechenergebnis für das Zahlenrätsel?
C
Es wird immer wichtiger, dass die Schüler/innen in der mathematisch-algebraischen Schreiweise geübt und sicher sind (s. S.XXX).
S
</td><td>Das symbolisch-abstrakte systematisch Lösen

Diese Stufe erfordert von den Schüler/innen drei Fähigkeiten:
... das Aufstellen einer sinn-vollen Gleichung aus einer Textaufgabe. Die Schüler/innen müssen (Außen)Welt verstehen und in der mathematischen Schreibweise beschreiben.
... das symbolisch-abstrakte Lösen dieser Gleichung. Die Schüler/innen lösen die Gleichung nach den mathematischen symbolischen Regeln und Gesetzen der Gleichungslehre ohne unmittelbaren Bezug zur (Außen-)Welt.
</td></tr>
</table>

		• Durch Variation der **Reihenfolge** der Zahlen (z.B. g+k=9 statt k+g=9) oder durch einen „**Perspektivenwechsel**“ (Gleichung für die große – statt der kleinen – Zahl) wird der Umgang mit den Gleichungen flexibler. • Ungewohnt und schwieriger sind für viel jedenfalls auch Zwei-Zahlen-Rätsel wie: „Wenn ich zum Zweifachen der Kleinen die Große addiere, bekomme ich 91. UND wenn ich zur Kleinen 29 addiere, bekomme ich die Große.“ Die Grundstruktur des Rätsels ist nicht mehr k+g=91 sondern 2k+g=91. Das führt bei den Schüler/innen leicht zu Verwirrungen – besonders bei der Probe.	• das Wieder-mit-Sinn-Erfüllen des errechneten Ergebnisse im ursprünglich Kontext der Textaufgabe. Die Schüler/innen müssen ihr - abstraktes, in ihrer Innenwelt gewonnenes - Rechenergebnis in seiner Bedeutung für die (Außen-)Welt erkennen. „Finde ich das, was ich mir vorgestellt oder ausgedacht habe, in der (Außen-)Welt wieder?“ • Auf der 3. Stufe die durch symbolisches und abstraktes Denken sowie systematisches Vorgehen gekennzeichnet ist, werden die Schüler/innen sehr unterschiedlich gut und schnell vorankommen. Um so wichtiger ist es für sie, wenn sie ihr individuelles Lerntempo haben dürfen ...
	Zweites Beispiel für die 3. Stufe: Ein längeres Zahlenrätsel ...	Anwenden der Methoden: Ein zweiter Schritt (auf der symboli-	

	Zwei Schwestern bekommen zusammen 48.- € Taschengeld. Die Ältere bekommt 6.- € mehr als die Jüngere. Wieviel Taschengeld bekommt jede?	schen Ebene) ist es, wenn nicht mehr Zahlenrätsel sondern Fragen aus anderen (Welt-)Zusammenhängen zu beantworten bzw. zu lösen sind. Die Schüler/innen **wenden** die bei den Zahlenrätseln erlernten Methoden **an**.	

Zur Verdeutlichung der Unterschiede in der Behandlung der Zwei-Zahlen-Rätsel auf den drei Stufen ist im Folgenden einmal ein und dasselbe Zahlenrätsel für alle drei Stufen ausgearbeitet.

Die Unterschiede beziehen sich insbesondere sowohl auf die äußere Form der Darstellung, d.h. die Schreibweise als auch (knapp) auf die verschiedenen Denkformen bzw Art der Denktätigkeit, welch die Schüler/innen jeweils dabei aufbringen müssen. Fragen nach dem Text als Angabe usw. sind dabei nicht berücksichtig.

Schauen Sie sich das erste Bild an und überlegen Sie zunächst selber, wie das entsprechende Zahlenrätsel lautet.

1. Stufe	
Äußere Schreibweise: $20 + 36 = 56$ $+16$	Benötigte Denkform bzw. Art der Denktätigkeit: • im Kopf rechnen **können** • knobeln und ausprobieren • (modifiziert enaktiv)
2. Stufe	
Äußere Schreibweise: $k + \underbrace{g}_{k+16} = 56$ $20 + 36 = 56$ $20 + 20 + \cancel{16} = 40$ $:2$	Benötigte Denkform bzw. Art der Denktätigkeit: • noch etwas knobeln und ausprobieren • aber dann schon mehr bilden von Lösungsmustern • bildhaft beschreibend • (ikonisch) • (bezieht sich auf das erste und

<table>
<tr><td></td><td>zweite Beispiel in</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Stufe –Fortsetzung (=Übergansstufe 1. Schritt)</td></tr>
<tr><td>Äußere Schreibweise:
$k + \underbrace{g}_{k+16} = 56$
$20 + 36 = 56$
$20 + 20+\cancel{16} = 40$
$:2$
$k + k+16 = 56$</td><td>Benötigte Denkform bzw. Art der Denktätigkeit:
noch etwas knobeln und ausprobieren
aber dann schon mehr bilden von Lösungsmustern
bildhaft beschreibend
(ikonisch)
zusätzlich: bildhaftes Beschreiben des gesamten Zahlenrätsels mit besonderem Blick auf die kleinere Zahl; vertieftes (Er-)Kennen der Beziehung zwischen den verschiedenen (bildhaft beschreibenden) Symbolen und ihrer zugrundlegenden mathematischen Bedeutung (im Zahlenrätsel).</td></tr>
<tr><td colspan="2">3. Stufe (auch Übergansstufe 2. Schritt)</td></tr>
<tr><td>Äußere Schreibweise:
$k + \underbrace{g}_{k+16} = 56$
$k + k+16 = 56 \quad | -16$
$k + k = 40 \quad | zf$
$2k = 40 \quad | :2$
$k = 20$
$g = 36$</td><td>Benötigte Denkform bzw. Art der Denktätigkeit:
3 Phasen
des Verstehens der Aufgabe und des Aufstellens der Gleichung,
des Lösens der Gleichung,
des Verstehens der rechnerischen Lösung für die ursprüngliche Aufgabe
Die Rechenschritte ergeben sich alleine aus der symbolisch mathematischen Bedeutung der Gleichung.
symbolisch abstrakt
(symbolisch)</td></tr>
</table>

Weitere Materialien zum Mathematikunterricht von Frank Rothe finden Sie auch unter http://www.calculemus.at/